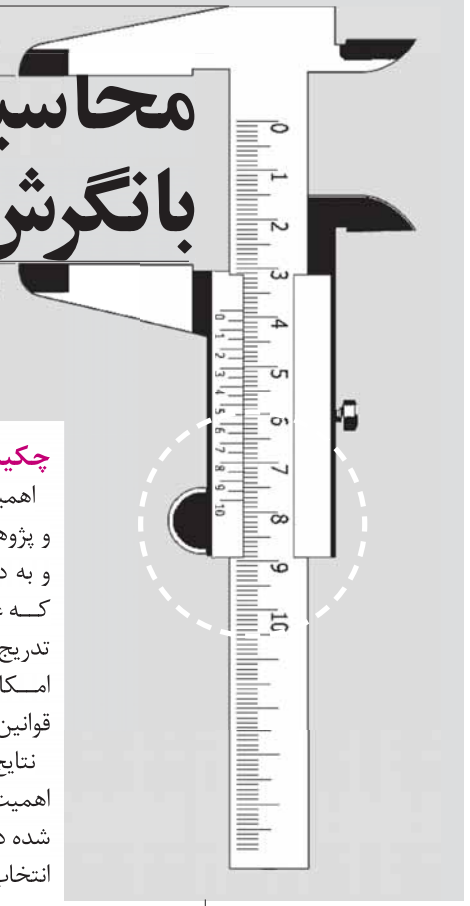
محاسبهٔ خطای آزمایش با نگرش دیفرانسیلی

منوچهر مرادویسی
دبیر فیزیک و کارشناس تکنولوژی گروه‌های آموزشی شهرستان‌های استان تهران



چکیده

اهمیت ویژهٔ اندازه‌گیری در علوم، مهندسی، و پژوهش‌های علمی بر کسی پوشیده نیست و به دلیل همین اندازه‌گیری کاربردی است که علومی نظیر: فیزیک، مکانیک و ریاضی به تدریج «علوم دقیق» نام گرفته‌اند. زیرا این علوم امکان برقراری روابط کمیّ دقیق برای بیان قوانین عینی طبیعت را فراهم می‌سازند.

نتایج حاصل از اندازه‌گیری‌ها وقتی حائز اهمیت می‌شوند که اغلب به پرسش‌های مطرح شده در علم پاسخ قطعی بدهند. این امر امکان انتخاب بین دو فرضیه علمی را فراهم می‌کند یا حتی گاهی باعث پدیدآمدن یک نظریه جدید می‌شود.

روش‌های اندازه‌گیری نیز فوق‌العاده متنوع‌اند. اما بدون توجه به روش اندازه‌گیری، هر اندازه‌گیری به معنای مقایسه اندازهٔ کمیت اندازه‌گیری شده با یکای استاندارد انتخابی است.

کلیدواژه‌ها: خطای دیفرانسیلی، اندازه‌گیری، رواداری، مدرج‌کردن

êêê

در سال‌های اخیر شاخهٔ جدیدی از رشته‌های مهندسی محاسباتی به نام اندازه‌گیری به‌وجود آمده است. مترولوژی، دانشی است که به اندازه‌گیری و کنترل ابعاد، زوایا و کیفیت قطعات صنعتی مربوط می‌شود. بدیهی است که دقت وسایل اندازه‌گیری، دامنهٔ اندازه‌گیری، میزان خطای مجاز روا داری و عمل آزمون و تنظیم وسایل اندازه‌گیری مدرج کردن از جایگاه ویژه‌ای برخوردارند.

رایانه‌های محاسباتی و دستگاه‌های خودکار سنجش به کمک داده‌های ورودی (مانند: دما، فشار گاز، آهنگ جریان و شاره و...) چگونگی تحول فرایند تحت کنترل را تعیین می‌کنند. همین موضوع سبب ایجاد «خطای اندازه‌گیری» می‌شود.

اصولاً هنگامی که آزمایشگری در محل آزمایشگاه به بررسی قانون‌ها یا آزمایش می‌پردازد، عواملی وجود دارد که مانع رسیدن به جواب کاملاً صحیح می‌گردد، این عوامل که باعث ایجاد خطا در آزمایش می‌شود «عوامل خطازا» می‌نامند.

عوامل خطازا

۱. خطای ناشی از عوامل محیطی مانند: دما، رطوبت و جریان هوا
۲. عدم حساسیت دستگاه
۳. خطای ناشی از شخص اندازه‌گیر
٤. خطای ناشی از وسیله اندازه‌گیری

é محیط آزمایشگاه

یکی از عواملی که باعث ایجاد خطا در آزمایش می‌شود. نور، فشار، رطوبت و دما و بسیاری از موارد مختلف دیگر است که می‌تواند در انجام آزمایش ایجاد خطا کند. مثلاً دمای پایین آزمایشگاه در انجام بسیاری از آزمایش‌های فیزیک گرما باعث تبادل گرمایی زیاد می‌شود و اشتباهاتی در نتایج آزمایش‌ها ایجاد می‌کند. این نوع خطاها اغلب غیرقابل کنترل است و میزان آن را نیز نمی‌توان محاسبه کرد.

é عدم حساسیت دستگاه

در انجام بسیاری از آزمایش‌ها از دستگاه‌هایی برای انجام آزمایش استفاده می‌شود که اگر این دستگاه‌ها مرغوبیت و دقت لازم را نداشته باشند باعث ایجاد خطا و نرسیدن آزمایشگر به جواب مطلوب می‌گردد.

é خطای ناشی از شخص اندازه‌گیر

افراد دقت و وسواس یکسانی در انجام آزمایش ندارند،

بهترین راه برای رسیدن به جواب‌های صحیح‌تر تکرار آزمایش و اندازه‌گیری مکرر کمیت‌ها است.

é خطای ناشی از وسیله اندازه‌گیری

قبل از توضیح در این مورد لازم به ذکر است که این نوع خطا را نباید با خطای حساسیت دستگاه اشتباه کرد. در اینجا منظور وسایلی است که با آن کمیت‌ها را اندازه‌گیری می‌کنیم. مانند: متر، ترازو، کرنومتر، کولیس، ریزسنج و ...

دقت اندازه‌گیری: کمترین مقدار عددی که به‌وسیله یک ابزار اندازه‌گیری می‌توان اندازه گرفت که معمولاً روی ابزار استاندارد این مقدار نوشته شده است.

هر چه دقت وسیله اندازه‌گیری بیشتر باشد یعنی مقادیر کوچک‌تری را بتواند اندازه‌گیری کند دقت انجام آزمایش بالاتر رفته و خطای کمتری به وجود می‌آید. با خط‌کش سانتی‌متری فقط تا یک سانتی‌متر را می‌توان دقیقاً اندازه گرفت و کوچک‌تر از آن را فقط می‌توان حدس زد ولی با ریزسنج تا ۰/۰۱ میلی‌متر را می‌توان اندازه گرفت پس اگر در هنگام انجام آزمایش برای اندازه‌گیری طول‌های کم از ریزسنج یا کولیس استفاده شود نتایج آزمایش دقیق‌تر و صحیح‌تر به دست خواهد آمد.

در عددهای اندازه‌گیری شده در رقم آخر آن به اندازه دقت وسیله اندازه‌گیری شک و تردید وجود دارد مثلاً اگر طولی را باریزسنجی با دقت ۰/۰۱ میلی‌متر ۵/۷۳ میلی‌متر اندازه بگیریم به اندازه ۰/۰۱ میلی‌متر ممکن است کمتر یا بیشتر اندازه‌گیری شده باشد. پس می‌توان این مقدار را در بازه ۵/۷۴ > L > ۵/۷۲

تعریف کرد. عدد ۰/۰۱ در اینجا دقت وسیله اندازه‌گیری ΔX می‌باشد. پس همواره کمیت X را در بازه $X \pm \Delta X$ تعریف می‌کنیم. یعنی:

$$X-\Delta X \le X \le X+\Delta X$$

کاربردی‌ترین نوع خطا، «خطای دیفرانسیلی» است که در این نوشتار به تفصیل به آن پرداخته شده است. فرض می‌کنیم تابعی با ضابطهٔ کلی $y=f(x)$ در x مشتق‌پذیر بوده و این مشتق مخالف صفر باشد. پس داریم:

ΔX = نمو متغیّر

$y=f(x)$ نمایش تابع

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$: نمو تابع (رشد)

مشتق تابع:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

پس: $\Delta y \approx f'(x).\Delta x$

چون $0 < \Delta X < \delta$ به اندازهٔ کافی کوچک است پس $f'(x).\Delta x$ به اندازهٔ کافی به Δy نزدیک می‌شود و دیفرانسیل تابع dy تقریب خوبی برای نمو تابع Δy است. نتیجه آنکه می‌نویسیم:

نمو متغیر × مشتق تابع = دیفرانسیل تابع

$$\Delta y \simeq dy = f'(x) \times \Delta x$$

بنابراین می‌توان گفت اگر به متغیّر x نمو Δx بدهیم، آنگاه $|\Delta x|$ خطای مطلق اندازه‌گیری متغیر است و $|\Delta y|$ را خطای تقریبی منتشره تابع می‌نامند. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$|\Delta x|$ = خطای مطلق اندازه گیری متغیّر

$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ = خطای نسبی متغیّر

$|\Delta y| \approx |dy| = f'(x).\Delta x$ = خطای تقریبی تابع (نمو تابع)

$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ = خطای نسبی تابع

مثال ۱. ارتفاع سقوط آزاد جسم در شرایط خلأ به کمک رابطهٔ $x = \frac{1}{2}gt^2$ بیان می‌شود. Δx و dx را به دست آورید و مفهوم مکانیکی آن را بیان کنید. (آزمایشگاه فیزیک ۲)

حل ۱.

$$\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t) = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 + gt\Delta t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = gt \Rightarrow dx = gt \times \Delta t = v.\Delta t$$

از طرفی داریم: $v = gt$

پس Δx اندازهٔ جا به‌جایی متحرک در زمان Δt و dx فاصله‌ای است که متحرک در زمان Δt با سرعت $v = gt$ می‌پیماید.

مثال ۲. فرض می‌کنیم بالن کروی شکل (ظرف آزمایشگاهی) با احتمال خطای ۰/۱ دارای شعاعی برابر ۲

سانتی‌متر باشد. درصد خطای نسبی در حجم این بالن را محاسبه کنید. (آزمایشگاه فیزیک ۱)

حل ۲ـ پاسخ ۱۵ درصد

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}, r=۲cm, |\Delta r|=۰/۱cm$$

$$\Delta v \approx dy = v'\times \Delta r = ۴\pi r^{۲}.\Delta r$$

$$=\frac{|\Delta v|}{|v|}\simeq\frac{|dv|}{|v|}=\frac{|۴\pi r^{۲}\times\Delta r|}{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}}$$

خطای نسبی حجم بالن (خطای نسبی تابع)

$$\text{درصد خطای نسبی}=۳\left|\frac{\Delta r}{r}\right|=۳\left|\frac{۰/۱}{۲}\right|=\frac{۳}{۲۰}\times۱۰۰=\%۱۵$$

مثال ۳. دورهٔ تناوب یک آونگ تناوبی از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ به دست می‌آید. اگر طول آونگ $L=۱m$ و $g=۹/۸۵ m/s^{۲}$ باشد، تغییرات دورهٔ تناوب (ΔT) را وقتی L به اندازهٔ $۱cm$ تغییر می‌کند، چقدر است؟ (آزمایشگاه فیزیک ٤)

$$|\Delta T|\approx|dT|=f'(L).\Delta L=\frac{۲\pi}{\sqrt{g}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{L}}\times\Delta L$$

حل ۳. پاسخ $\frac{۱}{۱۰۰}$

$$|\Delta T|=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\times\Delta L$$

$$|\Delta T|=\frac{\pi}{\sqrt{۹/۸۵\times l}}\times۰/۰۱m\simeq\frac{۱}{۱۰۰}$$

نتیجه مهم بحث آن است که اگر dy دیفرانسیل تابع y با ضابطهٔ کلی $y=f(x)$ باشد، $|\Delta y-dy|$ را خطای مطلق تابع و نیز $\left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|$ را خطای نسبی حاصل از جایگزینی دیفرانسیل تابع به جای نمو تابع می‌نامند.

پس می‌نویسیم: $|\Delta y-dy|=$ خطای مطلق تابع

$\left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|$ خطای نسبی حاصل از جایگزینی دیفرانسیل تابع به‌جای نمو تابع (خطای نسبی مطلق تابع)

مثال ٤. یک مکعب فلزی به ضلع $۵cm$ را در نظر بگیرید. اگر همه وجوه این مکعب به طور یکنواخت تراش بدهیم. به ترتیبی که از جرم آن ۰/۹٦ گرم کاسته شود و چگالی فلز $۸ gr/cm^{۳}$ باشد، کاهش اندازه ضلع مکعب چقدر است؟ (آزمایشگاه فیزیک ۲)

حل٤.

$a=$ ضلع مکعب و $V=a^{۳}=$ حجم مکعب

$$\Delta v = ۳a^{۲}.\Delta a = ۳\times۵^{۲}.\Delta a$$

$$\text{جرم فلز} = m=\rho.v$$

$$\Delta V=\frac{\Delta m}{\rho}=\frac{۰/۹۶}{۸}=۰/۱۲cm$$

که در ۳ =چگالی حجمی فلز مورد آزمایش است:

$$\Delta V=\frac{\Delta m}{\rho}=\frac{۰/۹۶}{۸}=۰/۱۲cm^{۳}$$

$$\Rightarrow \Delta V=۳\times۲۵\times\Delta a=۰/۱۲$$

$$\Rightarrow \Delta a=\frac{۰/۱۲}{۷۵}=۰/۰۰۱۶cm$$

$$y=f(x)=x^{۲}+۴$$

مثال ۵. تابعی با ضابطهٔ $y=f(x)=x^{۲}+٤$ را در نظر بگیرید. در نقطهٔ $X=۱$ و به ازای نمو متغیر $\Delta X=Q^{۱}$ خطای مطلق و خطای نسبی حاصل از جایگزینی دیفرانسیل تابع به جای نمو آن را به دست آورید.

حل ۵.

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{۲}+۴-x^{۲}-۴$$

$$\Delta y=۰/۲+۰/۰۱=۰/۲۱$$

$$dy=f'(x)\Delta x=۲x\Delta x=۲\times۱\times۰/۱=۰/۲$$

از طرفی داریم:

$$\text{خطای مطلق تابع}=|\Delta y-dy|=|۰/۲۱-۰/۲|=۰/۰۱$$

$$\text{خطای نسبی}=\left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=\frac{۰/۰۱}{۰/۲۱}=\frac{۱}{۲۱}=۰/۰۴۷$$

منابع

1. Sameen Ahmed khan.webs.com
2. http:// physics.sharif.edu
3. http:// Arxiv.org
4. http:// physics.umd.edu
5. http:// Slideshare.net
6. http:// Daviddarling.info

۷. دیفرانسیل و انتگرال معین ـ محمد عابدی ـ انتشارات مدرسه ـ سال ۱۳۷۸.

۸. یکاها و ابعاد کمیت‌های فیزیکی ـ L.A.Sena ـ ترجمهٔ مسعود میرشکار ـ مرکز نشر دانشگاهی ـ سال ۱۳٦٦.

۹. فیزیک عملی، ج. ل. اسکوایرز، ترجمه محمد علی شاهزمانیان و محمد حسن فیض، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۷۰.

۱۰. خطاهای مشاهده و محاسبه آن، نوشتهٔ تاپینگ، ترجمه محسن تدین، مرکز نشر دانشگاهی ۱۳٦٤.